

SỞ GD VÀ ĐT TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT LONG TRƯỜNG

🌟

ĐỀ CƯƠNG HKII TOÁN 10



Năm học: 2021-2022

PHẦN ĐẠI SỐ

§5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tam thức bậc hai (theo x) có dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

2. Dấu tam thức bậc hai:

Trường hợp 1: $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Cùng dấu a	

Trường hợp 2: $\Delta = 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Cùng dấu a	0	Cùng dấu a

Trường hợp 3: $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Cùng dấu a	0	Trái dấu a	Cùng dấu a

3. Một số điều kiện tương đương:

Nếu $ax^2 + bx + c$ là một tam thức bậc hai ($a \neq 0$) thì:

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

i. Có **nghiệm** khi và chỉ khi $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

ii. Có hai **nghiệm trái dấu** khi và chỉ khi $\frac{c}{a} < 0$.

iii. Có các **nghiệm dương** khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$.

iv. Có các **nghiệm âm** khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$.

Bất phương trình

v. $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

vi. $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

vii. $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

viii. $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

B. BÀI TẬP

Câu 1: Xét dấu của các biểu thức sau:

a. $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$.

c. $f(x) = 2x^2 + 3x$.

e. $f(x) = x^2 + 2$.

g. $f(x) = \frac{3x-2}{2+x^2-3x}$.

i. $f(x) = \frac{x^2+4x-12}{\sqrt{6}x^2+3x+\sqrt{2}}$.

k. $f(x) = \frac{3x^2-10x+3}{x+3}$

m. $f(x) = \frac{4x^2-1}{-2x-9}$

p. $f(x) = \frac{-4}{3x+1} - \frac{3}{2-x}$

b. $f(x) = -x^2 + 5x - 6$.

d. $f(x) = 6 + x - x^2$.

f. $f(x) = 16 - 9x^2$.

h. $f(x) = \frac{x-7}{4x^2-19x+12}$.

j. $f(x) = \frac{(x^2+1)(-x^2+4x+5)}{(2-x)(3x^2-12)}$.

l. $f(x) = \frac{3x^2-4x}{2x^2-x-1}$

n. $f(x) = x^2 - x^3 - 3 - x$

q. $f(x) = \frac{3x^2-x}{4x^2+x-3} - \frac{3-x^2}{3}$

Câu 2: Giải các bất phương trình sau:

a. $7x^2 - 4x - 3 \geq 0$.

c. $11 - (x+1)^2 > x$.

e. $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25} \geq 0$.

g. $\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \leq 0$.

i. $\frac{1}{3x-x^2-2} > \frac{3}{7x-4-3x^2}$.

k. $x(x+5) \leq 2(2x+1)$.

m. $(6-x)(x^2-4x+4) \geq 0$.

o. $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} \geq \frac{x+1}{x}$

q. $\frac{3x+7}{2+x-x^2} \leq 5$.

b. $9x^2 \geq 25$.

d. $(2x-1)(4-x^2) > 0$.

f. $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x-3}$.

h. $\frac{4-x}{x-5} \geq \frac{1}{1-x}$.

j. $4x^2 - 12x + 9 < 0$.

l. $12x^2 - 12x - 105 < 0$.

n. $\frac{x^2-8x+15}{16-x^2} > 0$.

p. $\frac{3x^2-4x-11}{x^2-x-6} \leq 1$.

r. $3(1-x) \geq \frac{7-8x}{x+1}$.

Câu 3: Giải các hệ bất phương trình sau:

a. $\begin{cases} x^2 - 2x \leq 0 \\ 2x + 1 < 3x + 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x+1} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2 - 5x + 2 < 0 \\ x^2 + 8x + 1 \leq 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} (2-x)x \geq 0 \\ (x^2 - 6x + 9)(x-4) < 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} (x^2 - 6x + 9)(x-4) < 0 \\ \frac{(2-x)(x^2 + 2x + 5)}{x-1} \geq 0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} (x^2 - 6x + 5)(x-4) < 0 \\ \frac{(3-x)(x^2 + 3x + 9)}{x^2 - 2x + 1} \geq 0 \end{cases}$

Câu 4: Tìm các giá trị của tham số m để các phương trình sau vô nghiệm:

a. $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0.$

b. $(3-m)x^2 - 2(m+3)x + m+2 = 0.$

Câu 5: Xét phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 4m-1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có:

a. Hai nghiệm phân biệt.

b. Hai nghiệm trái dấu.

c. Các nghiệm dương.

d. Các nghiệm âm.

Câu 6: Tìm các giá trị của tham số m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x :

a. $5x^2 - x + m > 0.$

b. $mx^2 - 4(m-1)x + m-5 \leq 0.$

Câu 7: Tìm m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

a. $5x^2 - x + m \leq 0.$

b. $mx^2 - 10x - 5 \geq 0.$

c. $mx^2 - 4(m-1)x + m-5 \leq 0.$

Câu 8: Tìm các giá trị của tham số m để các tam thức bậc hai sau có dấu không đổi (không phụ thuộc vào x)

a. $(m^2 - 1)x^2 + (m+3)x + (m^2 + m) = 0.$

b. $x^2 - (m^3 + m - 2)x + m^2 + m - 5 = 0.$

Câu 9: Với giá trị nào của tham số m hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện $x > 0, y < 0$?

$$\begin{cases} 2x - (m^2 + m + 1)y = -m^2 - 9 \\ m^4x + (2m^2 + 1)y = 1 \end{cases}.$$

* BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 10: Xét dấu của các biểu thức sau:

a. $f(x) = x^2 + x + 1.$

b. $f(x) = -2x^2 + 5x - 3.$

c. $f(x) = 4x^2 + 5x.$

d. $f(x) = 5 + 6x - 2x^2.$

e. $f(x) = 2x^2 + 2.$

f. $f(x) = 9 - 4x^2.$

g. $f(x) = \frac{4x-1}{6+x^2-5x}.$

h. $f(x) = \frac{5x-7}{2x^2-8x+7}.$

$$\text{i. } f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 + x - 3}.$$

$$\text{k. } f(x) = \frac{-3x - 3}{x + 3} \cdot \frac{x + 2}{x + 3}$$

$$\text{m. } f(x) = x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4}$$

$$\text{o. } f(x) = 1 - \frac{2 - x}{3x - 2}$$

$$\text{j. } f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 + 4x + 4}.$$

$$\text{l. } f(x) = x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4}$$

$$\text{n. } f(x) = \frac{4 - 3x}{2x + 1}$$

$$\text{p. } f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 5} \cdot \frac{1}{1 - x}$$

Câu 11: Giải các bất phương trình sau:

$$\text{a. } 5x^2 - 4x - 1 \leq 0.$$

$$\text{c. } 1 - (2x + 1)^2 > x.$$

$$\text{e. } \frac{5x^2 - 6x + 7}{2x^2 - 10x + 8} \geq 0.$$

$$\text{g. } \frac{2}{x - 3} - \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x + 4} \leq 0.$$

$$\text{i. } \frac{1}{-x^2 + 4x} > \frac{3}{7x - 4 - 3x^2}.$$

$$\text{k. } (1 - x)(x^2 - 6x + 9) \geq 0.$$

$$\text{m. } \frac{3x + 7}{20 + 6x - x^2} \leq 3.$$

$$\text{o. } \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 + 5x + 6} \geq \frac{3x + 1}{x}$$

$$\text{b. } -4x^2 - 12x + 9 < 0.$$

$$\text{d. } (2x - 3)(9 - x^2) < 0.$$

$$\text{f. } \frac{x^2 - 7x + 10}{(2x^2 - 3x + 1)(4 - x)} > 0.$$

$$\text{h. } \frac{4 - 2x}{3x - 5} \geq \frac{1}{1 - 5x}.$$

$$\text{j. } \frac{3x - 4}{x^2 - 3x - 4} < \frac{1}{x - 3}.$$

$$\text{l. } x(2x + 7) \leq 3(3x + 1).$$

$$\text{n. } \frac{2x^2 - 7x - 10}{x^2 - x - 6} \leq 2.$$

$$\text{p. } 2(4x - 1) \geq \frac{-1 - 3x}{x + 1}.$$

Câu 12: Giải các bất phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{-3x + 1}{2x + 1} \leq -2$$

$$\text{b) } \frac{1}{x^2 - 4} < \frac{3}{3x^2 + x - 4}$$

$$\text{c) } \frac{2x^2 - 16x + 27}{x^2 - 7x - 10} \leq 2$$

$$\text{d) } \frac{2x^2 - 10x + 14}{x^2 - 3x + 2} \geq 1$$

$$\text{e) } \frac{2x - 5}{x^2 - 6x - 7} < \frac{1}{x - 3}$$

$$\text{f) } \frac{2x - 5}{x^2 - 6x - 7} < \frac{1}{x - 3}$$

$$\text{g) } \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} \geq \frac{x + 1}{x}$$

$$\text{h) } \frac{2}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \leq 0$$

$$\text{i) } \frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} \geq \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$$

$$\text{k) } \frac{x + 3}{x^2 - 4} - \frac{1}{x + 2} < \frac{2x}{2x - x^2}$$

Câu 13: Giải các hệ bất phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 1 > 5 \\ 2x^2 - 9x + 7 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x^2 - 7x + 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$$

d)

$$\begin{array}{lll} \left\{ \begin{array}{l} 4x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ -4x^2 + 12x - 5 < 0 \end{array} \right. & \text{e) } \left\{ \begin{array}{l} -2x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ -x^2 - 3x + 10 \geq 0 \end{array} \right. & \text{f) } \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3 < 3x + 4 \\ x^2 - 7x + 10 \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{g)} \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 9 < 0 \\ x - 1 \quad 3x^2 + 7x + 4 \geq 0 \end{array} \right. & \text{h) } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0 \end{array} \right. & \text{i) } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 8x + 7 < 0 \\ x^2 - 8x + 20 > 0 \end{array} \right. \quad \text{j)} \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4x - 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \\ 2x - 3 \geq 0 \end{array} \right. & \text{k) } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 12x - 64 < 0 \\ x^2 - 8x + 15 > 0 \\ -3 \leq 4x \leq 26 \end{array} \right. & \text{l) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} > 1 \\ \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 2 \end{array} \right. \end{array}$$

PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Câu 1: Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \sqrt{2x-3} = x-3. & \text{b. } \sqrt{5x+10} = 8-x. & \text{c. } x - \sqrt{2x-5} = 4. \\ \text{d. } \sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{2-x}. & \text{e. } \sqrt{3x^2-9x+1} = x-2. & \text{f. } \sqrt{3x^2-9x+1} = |x-2|. \\ \text{g. } \sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2. & \text{h. } \sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-7} = 2. & \text{i. } \frac{\sqrt{21+x} + \sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x} - \sqrt{21-x}} = \frac{21}{x}. \end{array}$$

Câu 2: Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } |x^2 - 5x + 4| = x^2 + 6x + 5. & \text{b. } |x^2 - 1| = x^2 - 2x + 8. & \text{c. } |2 - 3x^2| - |6 - x^2| = 0. \\ \text{d. } |x^2 - 1| = 1 - |x|. & \text{e. } \frac{x^2 - 1 + |x+1|}{|x|(x-2)} = 2. & \end{array}$$

Câu 3: * Giải các phương trình sau: (nâng lũy thừa)

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}. & \text{b. } \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}. \\ \text{c. } \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2. & \text{d. } \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0. \end{array}$$

Câu 4: * Giải các phương trình sau: (biến đổi biểu thức dưới căn)

$$\begin{array}{l} \text{a. } \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} + 3\sqrt{2x-5} = 7\sqrt{2}. \\ \text{b. } \sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} = 1. \\ \text{c. } \sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} - 2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}} + 3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}} = 4. \end{array}$$

Câu 5: * Giải các phương trình sau: (đặt ẩn phụ)

$$\begin{array}{ll} \text{a. } x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}. & \text{b. } (x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6. \end{array}$$

$$c. (x-3)^2 + 3x - 22 = \sqrt{x^2 - 3x + 7}.$$

$$d. \sqrt{(x+1)(x+2)} = x^2 + 3x - 4.$$

Câu 6: * Giải các phương trình sau: (đặt hai ẩn phụ)

$$a. \sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1.$$

$$b. \sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-13} = 1.$$

$$c. \sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4.$$

$$d. \sqrt[3]{24+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{5+\sqrt{x}} = 1.$$

$$e. \sqrt[4]{47-2x} + \sqrt[4]{35+2x} = 4.$$

$$f. \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + 4356} + x}{x}} - \sqrt{x\sqrt{x^2 + 4356} - x^2} = 5.$$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa: $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

2. Phương pháp giải bất phương trình chứa dấu GTTĐ: khử dấu GTTĐ

Một số BPT chứa dấu GTTĐ cơ bản

$$\bullet |A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} A < B \\ A > -B \end{cases} \quad \bullet |A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A > B \\ A < -B \end{cases}$$

$$\bullet |A| < |B| \Leftrightarrow A^2 < B^2 \\ \Leftrightarrow (A+B)(A-B) < 0$$

B. BÀI TẬP

Câu 1: Giải các bất phương trình sau:

$$a. |2x-5| > 2.$$

$$b. |4-3x| \leq 4.$$

$$c. |x+2| < |5x-1|.$$

$$d. |2x-5| \geq x-3.$$

$$e. 4x+3 > |3x+2|$$

$$f. 2x^2 - |5x-3| < 0.$$

$$g. x-8 > |x^2+3x-4|.$$

$$h. |x^2-1| - 2x < 0.$$

$$i. |x^2+4x+3| > |x^2-4x-5|.$$

Câu 2: Giải các bất phương trình sau:

$$a. \left| \frac{x^2-4x}{x^2+x+2} \right| \leq 1.$$

$$b. \frac{|x-2|}{x^2-5x+6} \geq 3.$$

$$c. \frac{2x-5}{|x-3|} + 1 > 0.$$

$$d. |5x^2+9x+26| - 2|9-2x| > 0.$$

$$e. |x^2-3x+2| + x^2 > 2x.$$

$$f. |x-3| - |x+1| < 2.$$

$$g. |7x+1| - |3x-8| \leq 2x+7.$$

$$h. |x^2-4| - 2|x+3| < 2-x.$$

$$i. |x^2-4x| + 3 > x^2 + |x-5|$$

❖ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Giải bất phương trình chứa trị tuyệt đối

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \quad |5x - 4| \geq 6 & \text{b)} \quad \left| \frac{-5}{x+2} \right| < \left| \frac{10}{x-1} \right| & \text{c)} \quad \left| \frac{2x-3}{x-3} \right| \geq 1 \\
 \text{d)} \quad |-2x+1| + x - 3 < 5 & \text{e)} \quad |2x-1| - 3x < 5 & \text{f)} \quad |3x-5| < 2 \\
 \text{g)} \quad |x-2| > 2x-3 & \text{h)} \quad |-x^2+x-1| \leq 2x+5 & \text{i)} \quad |x^2-x| \leq |x^2-1| \\
 \text{j)} \quad |x^2+3x-4| - x + 8 \geq 0 & \text{k)} \quad x^2 - x + |3x-2| > 0 & \\
 \text{l)} \quad |x^2-5x+4| \leq x^2+6x+5 & \text{m)} \quad 4x^2+4x-|2x+1| \geq 5 &
 \end{array}$$

Câu 2. Giải bất phương trình chứa trị tuyệt đối

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \quad |x-1| + |x+2| < 3 & \text{b)} \quad 2|x-3| - |3x+1| \leq x+5 & \text{c)} \quad \frac{|2x-1|}{x^2-3x-4} < \frac{1}{2} \\
 \text{d)} \quad |x^2-2x-3| - 2 > |2x-1| & \text{e)} \quad 2|x+1| < |x-2| + 3x+1 & \text{f)} \quad |x+1| \leq |x| - x + 2 \\
 \text{g)} \quad \frac{|x-2|}{x^2-5x+6} \geq 3 & \text{h)} \quad \frac{x^2+x+1}{|2x-1|-x-2} \geq 0 & \text{i)} \quad \frac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2| \\
 \text{j)} \quad \frac{|2x-1|}{x+1} \leq \frac{1}{2} & \text{k)} \quad \frac{|4x^2-1|}{2x-1} < x^2+x-1 & \text{l)} \quad \frac{x^2-|x|-6}{x^2-4} \geq x \\
 \text{m)} \quad |x-1|-3 \quad |x+2|-5 < 0 & \text{n)} \quad \frac{|x-1|+3}{|5-x|+x} < 4 & \text{o)}
 \end{array}$$

$$\frac{2x-3 \quad 2|x-1|+2}{|x-1|-2} \leq 0$$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU CĂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương pháp giải bất phương trình chứa dấu căn thức: Khử dấu căn thức

Một số BPT chứa dấu căn cơ bản:

$$\begin{array}{lll}
 \bullet \sqrt{A} < \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A < B \end{cases} & \bullet \sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases} & \bullet \sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \\ B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}
 \end{array}$$

B. BÀI TẬP

Câu 1: Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a.} \quad \sqrt{5x+6} > 7. & \text{b.} \quad \sqrt{x^2-3x-4} \leq 2. & \text{c.} \quad \sqrt{x-3} < \sqrt{3x^2+3x-2}.
 \end{array}$$

Câu 2: Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a.} \quad \sqrt{x^2+x-12} \leq 8-x. & \text{b.} \quad \sqrt{x^2-x-12} < 7-x. & \text{c.} \quad \sqrt{-x^2-4x+21} < x+3.
 \end{array}$$

$$d. \sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2.$$

$$e. \sqrt{3x^2 + 13x + 4} \geq x - 2.$$

$$f. \sqrt{x^2 - 2x} \geq \sqrt{4x - 8}.$$

Câu 3: Giải các bất phương trình sau:

$$a. \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} > \sqrt{2x-8}.$$

$$b. \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+2} \leq 1.$$

$$c. \sqrt{2-x} > \sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x}$$

Câu 4: Giải các bất phương trình sau:

$$a. \sqrt{(x-3)(8-x)} + 26 > -x^2 + 11x.$$

$$b. (x+5)(x-2) + 3\sqrt{x(x+3)} > 0$$

$$c. (x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}.$$

$$d. \sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} \geq 1$$

Câu 5: Giải các bất phương trình sau:

$$a. \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{3-x} \leq 2.$$

$$b. \frac{\sqrt{-2x^2 - 15x + 17}}{x+3} \geq 0.$$

$$c. (x+3)\sqrt{x^2 - 4} \leq x^2 - 9$$

$$d. \frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{x+4}$$

Câu 6: Giải các bất phương trình sau:

$$a. x+2 \leq \sqrt[3]{x^2 + 8}.$$

$$b. \sqrt[3]{2x^2 + 1} \geq \sqrt[3]{3x^2 - 1}.$$

$$c. \sqrt[3]{x+1} > \sqrt{x-3}.$$

❖ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Giải các bất phương trình sau:

$$a) \sqrt{2x-1} \leq 2x-3$$

$$b) \sqrt{x^2 - 2x - 15} < x-3$$

$$c) \sqrt{x^2 - 4x} > x-3$$

$$d) \sqrt{x^2 - 5x - 14} \geq 2x-1$$

$$e) \sqrt{x^2 - 2x - 15} < x-3$$

$$f) \sqrt{x^2 - 1} > x+2$$

$$g) \sqrt{x^2 + x - 6} < x-1$$

$$h) \sqrt{2x^2 - 1} > 1-x$$

$$i)$$

$$x \leq 3 + \sqrt{x^2 - 5x - 14}$$

$$j) 1 \geq x - \sqrt{x^2 - x - 12}$$

$$k) 2x+3 - \sqrt{x^2 + 6x + 8} \geq 0$$

$$l)$$

$$\sqrt{x^2 - 4x - 12} \leq x-4$$

$$m) \sqrt{x^2 - 8x} \geq 2x+1$$

$$n) 2x+3 - \sqrt{x^2 - 4x - 12} < 0$$

$$o) x-2 \sqrt{x^2 + 4} \leq x^2 - 4$$

$$p) x-3 \sqrt{x^2 + 4} \leq x^2 - 9$$

$$q) \sqrt{x+4} \sqrt{6-x} \leq 2x+1$$

$$r) \frac{2x-4}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}} > 1$$

$$s) \frac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$$

$$t) \sqrt{2x-2} \sqrt{x-5} > x-3$$

$$u) \sqrt{-x^2 - 8x - 12} > x+4$$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

Câu 1: Xét dấu các biểu thức sau:

$$a. f(x) = (2x-1)(x+3).$$

$$b. f(x) = 4x^2 - 1.$$

$$c. f(x) = (-3x - 3)(x + 2)(x + 3).$$

$$e. f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5).$$

$$g. f(x) = (4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3).$$

$$d. f(x) = \frac{-4}{3x+1} - \frac{3}{2-x}.$$

$$f. f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1).$$

$$h. f(x) = \frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}.$$

Câu 2: Giải các bất phương trình sau:

$$a. x(2x + 3)(3x^2 + 2x - 1) > 0.$$

$$c. \frac{x^2 - 1}{2x + 1} \leq 0.$$

$$e. (3 - x)(x + 2)(x^2 - 4) > 0.$$

$$g. \frac{x(x - 1)(2 - 3x)}{2x^2 - 1} \leq 0.$$

$$i. \frac{(2x - 3)(x - 1)x^2}{2x - 2} > 0.$$

$$k. \frac{(2x - 1)(-x^2 - 1)}{3x(x - 2)} \leq 0.$$

$$b. \frac{2x(x^2 - 4)}{x - 2} > 0.$$

$$d. \frac{(x + 3)(4 - 4x + x^2)}{x(x - 2)} \geq 0.$$

$$f. x(x - 3)(x - 2)(3x^2 + 4) > 0.$$

$$h. \frac{2x(x^2 - 9)}{x(x - 2)} \leq 0.$$

$$j. \frac{(x - 1)(9 - 4x^2)(2 + 3x)}{2x + 1} \leq 0.$$

$$l. \frac{(-4 + 4x - x^2)(x + 4)(2 - 3x)}{2x + 1} \leq 0.$$

Câu 3: Giải các bất phương trình sau:

$$a. \frac{1}{x^2 - 4} < \frac{3}{3x^2 + x - 4}.$$

$$c. \frac{2x - 5}{x^2 - 6x - 7} \leq \frac{1}{x - 3}.$$

$$e. \frac{x^2 - 3x - 2}{x - 1} > 3x + 2.$$

$$b. \frac{x - 3}{2x + 1} \leq \frac{2x + 1}{3 - x}.$$

$$d. \frac{2x^2 + x}{1 - 2x} > 1 - x.$$

$$f. \frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} \geq \frac{2x - 1}{x^3 + 1}.$$

Câu 4: Giải các hệ bất phương trình sau:

$$a. \begin{cases} (x^2 - 5x + 6)(x - 1) < 0 \\ x(2 - 3x) \geq 0 \end{cases}.$$

$$b. \begin{cases} (2x + 1)(5 - 2x^2) \leq 0 \\ (3x + 4)(2 - x) > 0 \end{cases}.$$

$$c. \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ (3 - 3x^2)(x - 2) < 0 \end{cases}.$$

Câu 5: Cho phương trình: $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

a. Vô nghiệm.

b. Có nghiệm.

c. Có đúng một nghiệm.

d. Có hai nghiệm phân biệt.

Câu 6: Cho phương trình: $x^2 + 2(m - 1)x + m - 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

a. Vô nghiệm.

b. Có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

- i. x_1, x_2 trái dấu. ii. x_1, x_2 cùng dấu. iii. x_1, x_2 cùng dương

Câu 7: Cho tam thức: $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$. Xác định m để:

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) \leq 0$ trên một đoạn có độ dài bằng $\sqrt{3}$.
- $f(x) < 0$ trên khoảng $(1; 4)$.

Câu 8: Cho tam thức: $f(x) = -x^2 + 4(m+1)x + 1 - m^2$. Xác định m để:

- $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) > 0$ trên một đoạn có độ dài bằng 4.
- $f(x) > 0$ trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 9: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:

- $(m+2)x^2 - 2mx - m + 2 < 0$.
- $(m^2 - 1)x^2 + (m+1)x - 5 < 0$.

Câu 10: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 4m - 3 = 0$. Xác định các giá trị của m để phương trình có:

- Hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 < 0 < 2 < x_2$.
 - Đúng một nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$.
 - Hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; 2)$.
-

CHƯƠNG V. THỐNG KÊ

MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ THỐNG KÊ. PHƯƠNG SAI – ĐỘ LỆCH CHUẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho có k giá trị khác nhau ($k \leq n$). Gọi x_i là một giá trị bất kì trong k giá trị đó, ta có:
 - Số lần xuất hiện giá trị x_i trong dãy số liệu đã cho được gọi là **tần số** của giá trị đó, kí hiệu là n_i .
 - Số $f_i = \frac{n_i}{n}$ được gọi là **tần suất** của giá trị x_i .
2. Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp:

Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho được phân vào k lớp ($k \leq n$). Xét lớp thứ i ($i = 1, 2, \dots, k$) trong k lớp đó, ta có:

 - Số n_i các số liệu thống kê thuộc lớp thứ i được gọi là **tần số của lớp** đó.
 - Số $f_i = \frac{n_i}{n}$ được gọi là **tần suất của lớp** thứ i .
3. Biểu đồ: Biểu đồ hình cột, đường gấp khúc, hình quạt.
4. Số trung bình cộng: Kí hiệu: $\bar{x}$
 - TH bảng phân bố tần số và tần suất:
$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k) = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_kx_k.$$
 - TH bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp:
$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_kc_k) = f_1c_1 + f_2c_2 + \dots + f_kc_k.$$
trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i .
5. Mốt: Kí hiệu M_0

Mốt M_0 là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần suất.
6. Số trung vị: Kí hiệu M_e

Số trung vị M_e của một dãy gồm n số liệu thống kê được sắp thứ tự không giảm (hoặc không tăng) là:

 - Số đứng giữa dãy (số hạng thứ $\frac{n+1}{2}$), nếu n lẻ.

Trung bình cộng của hai số đứng giữa dãy (trung bình cộng của số hạng thứ $\frac{n}{2}$ và số hạng thứ $\frac{n}{2} + 1$), nếu n chẵn.
7. Phương sai: Kí hiệu s^2 .
 - TH bảng phân bố tần số và tần suất:
$$s^2 = \frac{1}{n}\left(n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2\right)$$
$$= f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_k(x_k - \bar{x})^2$$
 - TH bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp:

$$s^2 = \frac{1}{n} \left(n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2 \right)$$

$$= f_1 (c_1 - \bar{x})^2 + f_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_k (c_k - \bar{x})^2$$

8. Độ lệch chuẩn: Kí hiệu s . $s = \sqrt{s^2}$

B. BÀI TẬP:

Câu 1: Điểm thi môn Toán của lớp 10A như sau:

10	10	8	4	5	9	7	8	6	7
7	4	6	7	8	9	10	10	9	10
10	9	4	7	8	10	6	10	7	9
7	9	9	9	4	5	9	10	8	9

a. Lập bảng phân bố tần số, tần suất.

b. Vẽ các loại biểu đồ.

Câu 2: Kết quả điều tra về số con của 20 hộ gia đình ở một vùng dân cư như sau:

3	2	1	1	1	0	2	3	1	2
3	0	2	1	2	1	3	1	0	2

a. Lập bảng phân bố tần số, tần suất.

b. Vẽ biểu đồ hình cột.

Câu 3: Vẽ biểu đồ tần suất hình cột – đường gấp khúc tần suất và biểu đồ hình quạt bảng số liệu sau:
Nhiệt độ trung bình của tháng 12 tại thành phố Vinh từ 1961 đến 1990

Lớp nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	Tần suất (%)
[15; 17)	16.7
[17; 19)	3
[19; 21)	7
[21; 23]	3
Cộng:	100

Câu 4: Cho bảng số liệu: Tuổi nghề của 30 công nhân trong một nhà máy X

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1
9	4	14	2	8	5	5	7	3	8

a. Lập bảng phân bố tần số - tần suất.

b. Tính tuổi nghề trung bình của 30 công nhân trên.

c. Tìm M_0, M_e .

d. Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Câu 5: Cho bảng số liệu: *Điểm số 30 lần bắn của một xạ thủ A*

8	9	10	9	9	8	7	6	8	10
10	7	10	9	8	10	8	9	8	7
10	7	7	9	9	6	9	8	10	8

a. Lập bảng phân bố tần số - tần suất.

b. Vẽ biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc bảng số liệu trên.

c. Tính điểm trung bình của xạ thủ A.

d. Tính trung vị, mốt của bảng số liệu trên

e. Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Câu 6: Doanh thu của 50 cửa hàng của một công ty được cho bởi bảng số liệu sau:

120	121	129	114	88	109	95	147	118	128
148	71	93	67	62	57	103	135	97	166
83	114	66	156	88	64	49	101	79	120
75	113	155	48	104	112	79	87	88	141
55	123	152	60	83	144	84	95	90	27

a. Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm bảy lớp: [26.5; 48.5); [48.5; 70.5); [70.5; 92.5);...

b. Tính doanh thu trung bình của công ty.

c. Vẽ biểu đồ hình quạt.

Câu 7: Điểm thi môn Toán của lớp 10A như sau:

10	2	8	4	5	9	7	8	6
1	9	4	7	8	10	6	3	2
7	9	9	9	4	5	9	2	7
5	8	7	6	9	7	9	8	6

a. Lập bảng phân bố tần số - tần suất.

b. Tính điểm thi trung bình, số trung vị, mốt của các số liệu thống kê trên.

c. Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Câu 8: Kết quả điều tra về số con của 21 hộ gia đình ở một vùng dân cư như sau:

3	2	1	1	1	0	2
3	0	2	1	2	1	3
1	2	3	3	1	1	0

- Lập bảng phân bố tần số - tần suất.
- Tính số trung bình, số trung vị, mốt.

Câu 9: Tuổi thọ ở một thị trấn A là:

80	80	50	90	60	70	80	90
50	80	60	50	80	70	90	60
50	60	80	90	70	90	50	90
50	60	70	50	80	90	80	50

- Lập bảng phân bố tần số - tần suất
- Tính số trung bình, số trung vị, mốt.

Câu 10: Cho khối lượng của 30 củ sắn (tính theo gam) như sau:

90	93	98	99	90	92	99	96	99	93
91	94	96	93	95	92	90	96	93	96
98	98	92	97	94	91	94	97	98	99

- Lập bảng phân bố tần số - tần suất.
- Tính số trung bình, số trung vị, mốt.
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Câu 11: Số tiền lãi mỗi ngày trong 22 ngày của một tiệm báo như sau:

33	32	31	31	32	33	32	35	36	34	36
37	33	34	32	35	36	35	38	37	32	35

- Lập bảng phân bố tần số - tần suất.
- Tính số trung bình, số trung vị, mốt.
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Câu 12. Cho khối lượng của một số củ khoai tây (tính theo gam) như sau:

42	42	44	44	45	49	47	48	45
47	45	44	47	48	46	46	43	42
47	48	41	49	44	45	42	42	43
45	48	47	46	49	47	45	48	44

- Lập bảng phân bố tần số - tần suất.
- Tính số trung bình, số trung vị, mốt của các số liệu thống kê trên.

CHƯƠNG VI. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC.

§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quan hệ giữa độ và radian

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^{\circ}$$

2. Độ dài l của cung tròn có số đo $\alpha \text{ rad}$, bán kính R là $l = R\alpha$.

3. Số đo của các cung lượng giác có điểm đầu A , điểm cuối B là:

$$\widehat{s\odot AB} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4. Để biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác, ta chọn điểm $A(1;0)$ làm điểm đầu của cung vì vậy chỉ cần xác định điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho cung $\widehat{AM}$ có $\widehat{s\odot AM} = \alpha$.

5. Mỗi cung lượng giác $\widehat{CD}$ ứng với một góc lượng giác (OC, OD) và ngược lại. Số đo của cung lượng giác và góc lượng giác tương ứng là trùng nhau.

B. BÀI TẬP

Câu 1: Đổi số đo của các góc sau đây ra radian:

- a. 18° . b. $57^{\circ}30'$. c. -25° . d. $-125^{\circ}45'$.

Câu 2: Đổi số đo của các cung sau đây ra độ, phút, giây:

- a. $\frac{\pi}{18}$. b. $\frac{3\pi}{16}$. c. -2 . d. $\frac{3}{4}$.

Câu 3: Một đường tròn có bán kính 30cm . Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo:

- a. $\frac{\pi}{15}$. b. $1,5$. c. 37° .

Câu 4: Trên đường tròn lượng giác hãy biểu diễn các cung có số đo:

- a. $\frac{-5\pi}{4}$. b. 135° . c. $\frac{10\pi}{3}$. d. -225° .

Câu 5: Trên đường tròn lượng giác gốc A , các định các điểm M khác nhau, biết rằng cung $\widehat{AM}$ có số đo tương ứng là (trong đó k là một số nguyên tùy ý)

- a. $k\pi$. b. $k\frac{\pi}{2}$. c. $k\frac{\pi}{3}$.

Câu 6: Một hình lục giác đều $ABCDEF$ (các đỉnh lấy theo thứ tự đó và ngược chiều quay của kim đồng hồ) nội tiếp trong đường tròn tâm O . Tính số đo bằng radian của các cung lượng giác $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{AD}$, $\widehat{AE}$, $\widehat{AF}$.

§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Trên đường tròn lượng giác gốc A , cho cung $\widehat{AM}$ có $s\widehat{AM} = \alpha$. Thế thì tung độ của điểm M là $\sin \alpha$, hoành độ của điểm M là $\cos \alpha$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ (nếu $\cos \alpha \neq 0$), $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ (nếu $\sin \alpha \neq 0$).
- $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, với mọi α .
- $\tan \alpha$ không xác định khi và chỉ khi $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 $\cot \alpha$ không xác định khi và chỉ khi $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos \alpha \geq 0$ khi và chỉ khi điểm cuối M thuộc góc phần tư thứ I và IV.
 $\sin \alpha \geq 0$ khi và chỉ khi điểm cuối M thuộc góc phần tư thứ I và II.
- Từ dấu của $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ suy ra dấu của $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$.
- Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ $\tan \alpha \cot \alpha = 1$.

- Giá trị lượng giác của các cung đối nhau:

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha; \sin(-\alpha) = -\sin \alpha;$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha; \cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$

- Giá trị lượng giác của các cung bù nhau:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha; \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha; \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$

- Giá trị lượng giác của các cung hơn kém π

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha; \cot(\pi - \alpha) = \cot \alpha.$

- Giá trị lượng giác của các cung phụ nhau:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha; \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$
--

B. BÀI TẬP

Câu 1: Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu của các biểu thức sau:

- $A = \sin(\alpha + 90^\circ)$.
- $B = \cos(\alpha - 45^\circ)$.
- $C = \cos(270^\circ - \alpha)$.
- $D = \cos(2\alpha + 90^\circ)$.

Câu 2: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu của các biểu thức sau:

- $A = \cos(\alpha + \pi)$.
- $B = \tan(\alpha - \pi)$.
- $C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right)$.
- $D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$.

Câu 3: Tính giá trị lượng giác còn lại của α

- $\cos \alpha = \frac{4}{13}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
- $\sin \alpha = -0.7$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

c. $\tan \alpha = -\frac{15}{7}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

d. $\cot \alpha = -3$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

e. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

f. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$).

g. $\cot \alpha = \frac{2}{3}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

h. $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$).

Câu 4: Cho $\tan \alpha = \frac{3}{5}$, tính giá trị các biểu thức sau:

a. $A = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

b. $B = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$.

Câu 5: Tính giá trị biểu thức:

a. $A = \frac{\cot a + \tan a}{\cot a - \tan a}$ khi $\sin a = \frac{3}{5}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

b. $B = \frac{8 \tan^2 a + 3 \cot a - 1}{\tan a + \cot a}$ khi $\sin a = \frac{1}{3}$, $90^\circ < a < 180^\circ$.

c. $C = \frac{\sin^2 a + 2 \sin a \cdot \cos a - 2 \cos^2 a}{2 \sin^2 a - 3 \sin a \cdot \cos a + 4 \cos^2 a}$ khi $\cot a = -3$.

d. $D = \frac{\sin a + 5 \cos a}{\sin^3 a - 2 \cos^3 a}$ khi $\tan a = 2$.

e. $E = \frac{8 \cos^3 a - 2 \sin^3 a + \cos a}{2 \cos a - \sin^3 a}$ khi $\tan a = 2$.

g. $G = \frac{\cot a + 3 \tan a}{2 \cot a + \tan a}$ khi $\cos a = -\frac{2}{3}$.

h. $H = \frac{\sin a + \cos a}{\cos a - \sin a}$ khi $\tan a = 5$.

Câu 6: Cho $\sin a + \cos a = \frac{5}{4}$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a. $A = \sin a \cdot \cos a$.

b. $B = \sin a - \cos a$.

c. $C = \sin^3 a - \cos^3 a$.

Câu 7: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$.

b. $\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.

c. $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$.

d. $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$.

e. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha + \tan^2 \alpha + \tan \alpha + 1$.

f. $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

g. $1 + \sin x + \cos x + \tan x = (1 + \cos x)(1 + \tan x)$.

h. $(\cot^2 x - \cos^2 x)(\tan^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x \sin^2 x$.

i. $\frac{\tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \cdot \frac{1 + \cot^2 a}{\cot^2 a} = \frac{1 + \tan^4 a}{\tan^2 a + \cot^2 a}$.

j. $\frac{\sin a}{\sin a - \cos a} - \frac{\cos a}{\cos a - \sin a} = \frac{1 + \cot^2 a}{1 - \cot^2 a}$.

k. $1 - \frac{\sin^2 a}{1 + \cot a} - \frac{\cos^2 a}{1 + \tan a} = \sin a \cdot \cos a$.

l. $\frac{\sin^2 a}{\sin a - \cos a} - \frac{\sin a + \cos a}{\tan^2 a - 1} = \sin a + \cos a$.

Câu 8: Chứng minh các biểu thức sau độc lập đối với x :

a. $\frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$.

b. $\frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

$$c. 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x). \quad d. 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x) - (\sin^8 x + \cos^8 x)$$

Câu 9: Thu gọn các biểu thức sau:

$$a. A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x).$$

$$b. B = 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$c. C = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$d. D = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$$

$$e. E = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ.$$

$$f. F = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ.$$

$$g. F = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 180^\circ.$$

Câu 10: Đơn giản các biểu thức sau:

$$a. A = \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

$$b. B = \cos(\pi - x) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

$$c. C = \cos(270^\circ - x) - 2\sin(x - 450^\circ) + \cos(x + 900^\circ) + 2\sin(720^\circ - x).$$

❖ Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Xét dấu của các biểu thức sau:

$$a. A = \sin(\alpha + 90^\circ).$$

$$b. B = \cos(\alpha - 45^\circ).$$

$$c. C = \cos(270^\circ - \alpha).$$

$$d. D = \cos(2\alpha - 90^\circ).$$

Câu 2. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu của các biểu thức sau:

$$a. A = \cos(\alpha + \pi).$$

$$b. B = \tan(\alpha - \pi).$$

$$c. C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right).$$

$$d. D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right).$$

Câu 3. Tính giá trị lượng giác còn lại của α

$$a. \cos \alpha = \frac{5}{13} \text{ và } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$b. \sin \alpha = -0.6 \text{ và } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

$$c. \tan \alpha = \frac{15}{7} \text{ và } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

$$d. \cot \alpha = -3 \text{ và } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

$$e. \sin \alpha = \frac{-3}{5} \quad (90^\circ < \alpha < 180^\circ).$$

$$f. \cos \alpha = -\frac{12}{13} \quad (180^\circ < \alpha < 270^\circ).$$

$$g. \cot \alpha = \frac{2}{7} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ).$$

$$h. \tan \alpha = 2 + \sqrt{3} \quad (180^\circ < \alpha < 270^\circ).$$

Câu 4. Cho $\tan \alpha = \frac{4}{5}$, tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a. } A = \frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{3 \sin \alpha - \cos \alpha}.$$

$$\text{b. } B = \frac{-2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}.$$

Câu 5. Tính giá trị biểu thức:

$$\text{a. } A = \frac{\cot a + 3 \tan a}{\cot a - 2 \tan a} \text{ khi } \cos a = \frac{-3}{5}, \frac{\pi}{2} < a < \pi.$$

$$\text{b. } B = \frac{8 \tan^2 a + 3 \cot a - 5}{\tan a + \cot a} \text{ khi } \sin a = \frac{2}{3}, 90^\circ < a < 180^\circ.$$

$$\text{c. } C = \frac{\sin^2 a + \sin a \cdot \cos a - 2 \cos^2 a}{2 \sin^2 a - 5 \sin a \cdot \cos a + 4 \cos^2 a} \text{ khi } \cot a = -3.$$

$$\text{d. } D = \frac{\cos a + 5 \sin a}{\sin^3 a - 2 \cos^3 a} \text{ khi } \tan a = 5.$$

$$\text{e. } E = \frac{8 \cos^3 a - 4 \sin^3 a + \cos a}{2 \cos a - \sin^3 a} \text{ khi } \tan a = 2.$$

$$\text{g. } G = \frac{-\cot a + 3 \tan a}{2 \cot a - \tan a} \text{ khi } \cos a = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{h. } H = \frac{\sin a + \cos a}{\cos a - \sin a} + 2 \cot a \text{ khi } \tan a = 5.$$

Câu 6. Cho $\sin a + \cos a = -\frac{5}{4}$. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a. } A = \sin a \cdot \cos a.$$

$$\text{b. } B = \sin a - \cos a.$$

$$\text{c. } C = \sin^3 a - \cos^3 a.$$

Câu 7. Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính giá trị của

$$\text{a. } \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{b. } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha.$$

$$\text{c. } \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha.$$

§3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức cộng:

$$\begin{array}{l|l|l} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b & \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b & \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b & \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{array}$$

2. Công thức nhân đôi:

$$\begin{array}{l|l|l} \sin 2a = 2 \sin a \cos a & \begin{array}{l} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ = 2 \cos^2 a - 1 \\ = 1 - 2 \sin^2 a \end{array} & \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \end{array}$$

3. Công thức hạ bậc:

$$\begin{array}{l|l|l} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} & \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} & \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} \end{array}$$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)] \end{aligned}$$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\begin{aligned} \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\ \cos u - \cos v &= -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \\ \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\ \sin u - \sin v &= 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \end{aligned}$$

6. Công thức nhân ba:

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \quad \left| \quad \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \right.$$

B. BÀI TẬP

CÔNG THỨC CỘNG

Câu 1: Tính:

a. $\cos 75^\circ$; $\sin 15^\circ$; $\cot(-15^\circ)$; $\sin 240^\circ$.

b. $\sin \frac{7\pi}{12}$; $\tan(-\frac{\pi}{12})$; $\cos \frac{13\pi}{12}$

Câu 2: Tính giá trị của các biểu thức sau:

$A = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ biết $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$B = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ biết $\cos x = -\frac{12}{13}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

$C = \cos x - 30^\circ$ biết $\tan x = \sqrt{2}$ và $0^\circ < x < 90^\circ$

$$D = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ biết } \sin x = \frac{3}{5} \text{ và } \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \text{ biết } \sin x = -\frac{12}{13} \text{ và } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

$$K = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) \text{ biết } \cos a = \frac{1}{3}, \cos b = \frac{1}{4}.$$

$$L = \sin(a-b), \cos(a+b), \tan(a+b) \text{ biết } \sin a = \frac{8}{17}, \tan b = \frac{5}{12} \text{ và } a, b \text{ là các góc nhọn.}$$

Câu 3: Rút gọn biểu thức (dùng cung liên kết - công thức cộng)

$$A = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin x - \pi$$

$$B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$C = 2 \cos x + 3 \cos \pi - x - \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$D = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin 5\pi - x + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$E = 2 \cos x - 3 \cos \pi - x + 5 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

Câu 4: Chứng minh các hệ thức sau:

a. $\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$.

b. $\tan x + \tan y = \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$.

c. $\tan x \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \tan x = -3$.

d. $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})$.

e. $(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 230^\circ + \cos 290^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ + \cos 380^\circ) = 0$.

f. $\tan x \cdot \tan 3x = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x \cdot \tan^2 x}$.

Câu 5: *Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a. $\sin C = \sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A$

b. $\frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \tan A + \tan B \quad (A, B \neq 90^\circ)$

c. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \quad (A, B, C \neq 90^\circ)$

d. $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$

$$e. \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$$

$$f. \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$$

$$g. \cot B + \frac{\cos C}{\sin B \cdot \cos A} = \cot C + \frac{\cos B}{\sin C \cdot \cos A} \quad (A \neq 90^\circ)$$

$$h. \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$i. \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

HD: a, b, c, d. Sử dụng $(A + B + C = 180^\circ)$

$$e, f. \text{ Sử dụng } \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) + \frac{C}{2} = 90^\circ$$

$$g. VT = VP = \tan A$$

$$h. \text{ Khai triển } \cos \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right)$$

$$i. \text{ Khai triển } \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right).$$

$$\text{Chú ý: Từ } \cos \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) = \sin \frac{A}{2} \Rightarrow \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin^2 \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

Câu 6: *Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh:

$$a. \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}.$$

$$b. \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9.$$

$$c. \tan^6 A + \tan^6 B + \tan^6 C \geq 81.$$

$$d. \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1$$

$$e. \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

HD: a, b, c. Sử dụng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ và BĐT Cô-si

$$d. \text{ Sử dụng } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$\text{và } \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$$

$$e. \text{ Khai triển } \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2 \text{ và sử dụng câu c.}$$

CÔNG THỨC NHÂN

Câu 7: Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết:

$$a. \cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha \text{ khi } \cos \alpha = -\frac{5}{13}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$b. \cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha \text{ khi } \tan \alpha = 2$$

$$c. \sin \alpha, \cos \alpha \text{ khi } \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$d. \cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha \text{ khi } \tan \alpha = \frac{7}{8}$$

Câu 8: Rút gọn các biểu thức sau (dùng công thức hạ bậc, nhân đôi, nhân ba)

$$A = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$$

$$B = \frac{1 - 2 \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}$$

$$C = \frac{2}{1 - \tan x} \cdot \frac{1}{1 + \cot x}$$

$$D = 1 - \tan^2 x \cot x$$

$$E = \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

$$F = \frac{\cot x - \tan x}{\cos 2x}$$

Câu 9: *Tính giá trị của biểu thức sau:

a. $A = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$.

b. $B = \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$.

c. $C = \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}$.

d. $D = \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$.

e. $E = \sin 6^\circ \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 66^\circ \cdot \sin 78^\circ$.

f. $F = \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}$

g. $G = \sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \dots \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ$.

h. $H = \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 30^\circ \dots \cos 70^\circ \cdot \cos 80^\circ$.

i. $I = 96\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6}$.

j. $J = \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$.

k. $K = \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15}$.

Câu 10: *Chứng minh các hệ thức sau:

a. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$.

b. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$.

c. $\sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \cdot \sin^3 x = \frac{1}{4} \sin 4x$.

d. $\sin^6 \frac{x}{2} - \cos^6 \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \cos x (\sin^2 x - 4)$.

e. $1 - \sin x = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.

f. $\frac{1 - \sin^2 x}{2 \cot \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = 1$.

k. $\tan x = \cot x - 2 \cot x$.

l. $\cot x + \tan x = \frac{2}{\sin 2x}$.

m. $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} = \cos \frac{x}{8}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

Câu 11: Biến đổi thành tổng:

a. $2 \sin(a+b) \cdot \cos(a-b)$.

b. $2 \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$.

c. $4 \sin 3x \cdot \sin 2x \cdot \cos x$.

d. $4 \sin \frac{13x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \frac{x}{2}$.

e. $\sin(x+30^\circ) \cdot \cos(x-30^\circ)$.

f. $\sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{2\pi}{5}$.

g. $2 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$.

h. $8 \cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$.

i.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos 2x.$$

$$j. 4 \cos(a-b) \cdot \cos(b-c) \cdot \cos(c-a).$$

Câu 12: Chứng minh:

$$a. 4 \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos 3x.$$

$$b. 4 \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x.$$

Áp dụng tính:

$$A = \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ.$$

$$B = \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ.$$

$$C = \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ.$$

$$D = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ.$$

Câu 13: Biến đổi thành tích các biểu thức sau:

$$a. 2 \sin 4x + \sqrt{2}.$$

$$b. 3 - 4 \cos^2 x.$$

$$b. 1 - 3 \tan^2 x.$$

$$d. \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x.$$

$$3 + 4 \cos 4x + \cos 8x.$$

$$f. 1 + \sin 2x - \cos 2x - \tan 2x$$

$$g. \sin 5x + \sin 6x + \sin 7x + \sin 8x$$

$$h.$$

$$\sin^2(x + 90^\circ) - 3 \cos^2(x - 90^\circ)$$

Câu 14: Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{1 - 2 \cos x}{1 + 2 \cos x}$$

$$B = \frac{\sqrt{3} - 2 \cos 3x}{\sqrt{3} + 2 \cos 3x}$$

$$C = \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 4x + \sin 2x}$$

$$D = \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}$$

$$E = \frac{1 + \sin 4x - \cos 4x}{1 + \cos 4x + \sin 4x}$$

$$F = \frac{\sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2 \cos 4x + \cos 5x}$$

$$G = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$$

Câu 15: *Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a. \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{7\pi}{30} \sin \frac{13\pi}{30} \sin \frac{19\pi}{30} \sin \frac{25\pi}{30}$$

$$b. 16 \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 90^\circ.$$

$$c. \cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ.$$

$$d. \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}.$$

$$e. \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}.$$

$$f. \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}.$$

$$g. \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}.$$

$$h. \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}.$$

Câu 16: *Chứng minh rằng:

$$a. \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4.$$

$$b. \tan 20^\circ - \tan 40^\circ + \tan 80^\circ = 3\sqrt{3}.$$

$$c. \tan 10^\circ - \tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$d. \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 80^\circ + \tan 60^\circ = 8 \sin 40^\circ.$$

$$f. \tan^6 20^\circ - 33 \tan^4 20^\circ + 27 \tan^2 20^\circ - 3 = 0.$$

$$g. \tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 20^\circ.$$

Câu 17: Tính $\sin^2 2x$, biết: $\frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7$.

Câu 18: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\cot x - \tan x - 2 \tan 2x = 4 \cot 4x$.

b. $\frac{1 - 2 \sin^2 2x}{1 - \sin 4x} = \frac{1 + \tan 2x}{1 - \tan 2x}$.

c. $\frac{1}{\cos^6 x} - \tan^6 x = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} + 1$.

d. $\tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}$.

e. $\tan 6x - \tan 4x - \tan 2x = \tan 2x \cdot \tan 4x \cdot \tan 6x$.

f. $\frac{\sin 7x}{\sin x} = 1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x$.

g. $\cos 5x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin x = \cos 2x \cdot \cos 4x$.

Câu 19: *a. Cho $\sin(2a + b) = 5 \sin b$. Chứng minh: $\frac{2 \tan(a + b)}{\tan a} = 3$

b. Cho $\tan(a + b) = 3 \tan a$. Chứng minh: $\sin(2a + 2b) + \sin 2a = 2 \sin 2b$

Câu 20: Cho tam giác ABC . Chứng minh:

a. $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

b. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

c. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

d. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.

e. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.

f. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.

Câu 21: *Tìm các góc của tam giác ABC , biết:

a. $B - C = \frac{\pi}{3}$ và $\sin B \cdot \sin C = \frac{1}{2}$.

b. $B + C = \frac{2\pi}{3}$ và $\sin B \cdot \cos C = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$.

Câu 22: *Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông:

a. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$.

b. $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = 0$.

c. $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \cdot \sin C}$.

d. $\cot \frac{B}{2} = \frac{a + c}{b}$.

Câu 23: *Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác ABC cân:

a. $a \tan A + b \tan B = (a + b) \tan \frac{A + B}{2}$.

b. $2 \tan B + \tan C = \tan^2 B \cdot \tan C$.

c. $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{1}{2} (\tan A + \tan B)$.

d. $\cot \frac{C}{2} = \frac{2 \sin A \cdot \sin B}{\sin C}$.

Câu 24: *Chứng minh bất đẳng thức, từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều:

a. $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b. $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

c. $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

d. $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$.

❖ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Tính giá trị các biểu thức:

$$A = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ biết } \sin x = -\frac{4}{5} \text{ và } \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$B = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \text{ biết } \cot\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = 2$$

$$C = \sin\left(\frac{7\pi}{4} + x\right) \text{ biết } \cot x = \frac{2}{3}$$

$$E = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \text{ biết } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \text{ biết } \cos a = \frac{1}{3}, \cos b = \frac{1}{4}.$$

Câu 2. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \sin(a+b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin(-b) . \quad B = \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \frac{1}{2} \sin^2 a .$$

$$C = \sin 5\pi + x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cot 3\pi - x + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$D = \cos 15\pi - x + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cot\left(\frac{11\pi}{2} - x\right)$$

$$E = \sin \pi + x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot 2\pi - x + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$F = \cos 5\pi - x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot 3\pi - x$$

$$G = \cos 270^\circ - x - 2 \sin x - 450^\circ + \cos x + 900^\circ$$

$$H = \frac{\sin^2 2x - 4 \sin^2 x}{\sin^2 2x + 4 \sin^2 x - 4}$$

$$I = \frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x} \cdot \frac{\cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$J = \frac{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

$$K = \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}$$

$$L = \frac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x}$$

$$M = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$$

$$N = \frac{\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x}{\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x}$$

$$O = \frac{\cos 7x - \cos 8x - \cos 9x + \cos 10x}{\sin 7x - \sin 8x - \sin 9x + \sin 10x}$$

$$P = \frac{\sin x + y - \sin x}{\sin x + y + \sin x} - \frac{\cos x + y + \cos x}{\cos x - y - \cos x}$$

Câu 3. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$

b. $\tan x \cdot \tan 3x = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 x \cdot \tan^2 2x}.$

c. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = 1.$

d. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}.$

e. $\frac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cot a \cdot \cot b + 1}{\cot a \cdot \cot b - 1}.$

f. $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$

Câu 4. Tính các giá trị lượng giác của cung 2α

a. $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$ khi $\cos \alpha = \frac{12}{13}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

b. $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha, \cot 2\alpha$ khi $\tan \alpha = 3$

c. $\cos 2\alpha, \tan 2\alpha, \cot 2\alpha$ khi $\sin 2\alpha = -\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Câu 5. Biến đổi thành tích các biểu thức sau:

a. $\cos 5x + \cos 8x + \cos 9x + \cos 12x$

b. $\cos x + \sin x + 1$

c. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

d. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

Câu 6: Biến đổi thành tổng các biểu thức sau:

a. $2\sin(a+b) \cdot \cos(a-b).$

b. $2\cos(a+b) \cdot \cos(a-b).$

c. $4\sin 3x \cdot \sin 2x \cdot \cos x.$

d. $4\sin \frac{13x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \frac{x}{2}.$

e. $\sin(x+30^\circ) \cdot \cos(x-30^\circ).$

f. $\sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{2\pi}{5}.$

g. $2\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x.$

h. $8\cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x.$

i.

$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos 2x.$

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

Câu 1: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

$$A = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Câu 2: Tính giá trị biểu thức sau:

a. $A = \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ - \sin 80^\circ \cdot \sin 40^\circ$

b. $B = \cos(a - 30^\circ)$ biết rằng: $\tan a = (0 < a < 90^\circ)$

c. $C = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$

Câu 3: Rút gọn các biểu thức sau:

- a. $A = \sin 4x \cdot \cot 2x - \cos 4x$.
- b. $B = \cos(40^\circ - x) \cos(x + 20^\circ) - \sin(40^\circ - x) \sin(x + 20^\circ)$.
- c. $C = \sin(x + 10^\circ) \cos(2x - 80^\circ) + \sin(x + 100^\circ) \cos(2x + 10^\circ)$
- d. $D = \sin(a + b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin(-b)$.
- e. $E = \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \frac{1}{2} \sin^2 a$.
- f. $F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - \sin(a - b)$.
- g. $G = \frac{\tan 2x + \cot(90^\circ + x)}{1 + \cot(90^\circ - 2x) \tan x}$.

Câu 4: Rút gọn biểu thức:

- a. $A = \sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 a \cos^2 b$.
- b. $B = \frac{\sin 73^\circ \cos 3^\circ - \sin 87^\circ \cos 17^\circ}{\cos 132^\circ \cos 62^\circ + \cos 42^\circ \cos 28^\circ}$.
- c. $C = \frac{2 \sin(a + b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)} - \tan b$.
- d. $D = \frac{\sin(a - b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin(b - c)}{\cos b \cos c} + \frac{\sin(c - a)}{\cos c \cos a}$.
- e. $E = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x \cdot \tan^2 x}$.

Câu 5: Chứng minh các đẳng thức sau:

- a. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right) = \sin a$.
- b. $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- c. $\frac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \frac{\cot a \cdot \cot b + 1}{\cot a \cdot \cot b - 1}$.
- d. $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 6: Cho tam giác ABC . Chứng minh:

- a. $\cos A = \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C$.
- b. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ (tam giác ABC không vuông).
- c. $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$.
- d. $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

Câu 7: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

- a. $A = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.
- b. $B = \sin^2 x + \sin^2(60^\circ + x) + \sin^2(x - 60^\circ)$.

Câu 8: Tính giá trị của biểu thức.

- a. $A = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$.
- b. $B = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.
- c. $C = \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}$.
- d. $D = \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.
- e. $E = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$.
- f. $F = \sin 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \dots \sin 75^\circ \sin 85^\circ$.
- g. $G = \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}$.
- h. $H = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 30^\circ \dots \cos 70^\circ \cos 80^\circ$.

$$\text{i. } I = \cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{3\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{5\pi}{15} \cos \frac{6\pi}{15} \cos \frac{7\pi}{15}.$$

$$\text{j. } J = \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}.$$

Câu 9: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a. } A = \frac{\cos 7x - \cos 8x - \cos 9x + \cos 10x}{\sin 7x - \sin 8x - \sin 9x + \sin 10x}.$$

$$\text{b. } B = \frac{\sin 15x + 2\sin 12x + \sin 9x}{\cos 15x + 2\cos 12x + \cos 9x}.$$

$$\text{c. } C = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1}.$$

$$\text{d. } D = \tan \frac{\pi}{24} + \tan \frac{7\pi}{24}.$$

$$\text{e. } E = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}.$$

$$\text{f. } F = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ.$$

$$\text{g. } G = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2}.$$

$$\text{h. } H = 2 \left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right).$$

Câu 10: Cho tam giác ABC . Chứng minh:

$$\text{a. } \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

$$\text{b. } \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$\text{c. } \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

$$\text{d. } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

$$\text{e. } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

PHẦN HÌNH

CHƯƠNG III: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG.

1. Phương trình tổng quát (PTTQ) của đường thẳng d đi qua $A(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a; b)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$
2. Phương trình tham số (PTTS) của đường thẳng d đi qua $A(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(x_0; y_0)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$
3. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua $A(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(x_0; y_0)$:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$
4. Đường thẳng qua $A(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k có phương trình:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Suy ra: $k = -\frac{a}{b} = \frac{u_2}{u_1}$
5. Cho $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0; \Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$
 - $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
 - $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
 - $\Delta_1 \nparallel \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

A. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

- Câu 1.** Lập *phương trình tham số* của đường thẳng d biết d :
- a) Đi qua $M(-3; 4)$ và có VTCP $\vec{u} = (-7; 2)$
 - b) Đi qua gốc tọa độ O và có VTCP $\vec{u} = (-2; 9)$
 - c) Đi qua $I(4; -3)$ và có VTCP $\vec{u} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$
 - d) Đi qua $A(3; 2)$ và có VTPT $\vec{n} = (-2; 1)$
 - e) Cho $A(1; -2), B(-3; 4)$ và điểm M thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{MB}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và có VTCP $\vec{b} = (-4; 9)$.
- Câu 2.** Viết *phương trình tổng quát* của đường thẳng Δ biết Δ :
- a) Đi qua $M(-3; 4)$ và có VTPT $\vec{n} = (5; -2)$
 - b) Đi qua gốc tọa độ O và có VTPT $\vec{b} = (-2; 4)$
 - c) Đi qua $E(1; -3)$ và có VTPT $\vec{n} = 4\vec{j} - 3\vec{i}$
 - d) Đi qua $A(3; 0)$ và có VTCP $\vec{u} = (-2; 1)$
 - e) Cho $A(1; -2), B(-5; 0)$ và điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{MB}$. Viết *pttq* đt đi qua M và có VTCP $\vec{b} = (-4; 2)$.

Câu 3. Viết *phương trình tham số* của đường thẳng trong các trường hợp sau:

- a) Đi qua $M(-3;4)$ và $N(5;-1)$.
- b) Đi qua $E(0;-4)$ và $F(-5;5)$.
- c) Đi qua $A(3;2)$ và gốc tọa độ O.
- d) Đi qua $B(-5;-1)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.
- e) Đi qua $F(1;-3)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2.
- f) Cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$ và cắt Oy tại điểm có tung độ -5.

Câu 4. Viết *phương trình tổng quát* của đường thẳng trong các trường hợp sau:

- a) Đi qua $A(3;2)$ và $B(-5;-1)$.
- b) Đi qua $E(4;-4)$ và $F(-2;3)$.
- c) Đi qua $M(-3;4)$ và có hệ số góc $k = -2$.
- d) Đi qua $N(3;-5)$ và có hệ số góc $a = -\frac{2}{7}$.
- e) Đi qua $H(7;-1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ -2.
- f) Cắt trục Ox tại $\frac{5}{2}$ và cắt Oy tại điểm có hoành độ bằng 3.

Câu 5. Cho tam giác ABC có $A(1;4)$, $B(-3;-2)$, $C(5;0)$.

- a) Viết phương trình đường thẳng AB
- b) Viết PT đường trung tuyến AM.
- c) Viết phương trình đường cao BK.
- d) Viết PT đường trung trực của cạnh B

Câu 6. Cho ΔABC . Viết phương trình các cạnh, các đường trung tuyến, các đường cao của tam giác với

- a) $A(2; 0)$, $B(2; -3)$, $C(0; -1)$
- b) $A(1; 4)$, $B(3; -1)$, $C(6; 2)$
- c) $A(-1; -1)$, $B(1; 9)$, $C(9; 1)$
- d) $A(4; -1)$, $B(-3; 2)$, $C(1; 6)$

Câu 7. Viết phương trình của đường thẳng d trong các trường hợp sau:

- a) Đi qua $A(3;2)$ và song song với $d': \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 \end{cases}$
- b) Đi qua $B(-1;-2)$ và vuông góc với $d': \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$
- c) Đi qua $C(5;-9)$ và vuông góc với $d': 3y - 1 = 0$
- d) Đi qua $D(1;2)$ và song song với $d': y = -\frac{5}{4}x + 1$

Câu 8. Cho tam giác ABC, biết phương trình ba cạnh của tam giác. Viết phương trình các đường cao của tam giác, biết:

- a) $AB: 2x - 3y - 1 = 0$, $BC: x + 3y + 7 = 0$, $CA: 5x - 2y + 1 = 0$
- b) $AB: 2x + y + 2 = 0$, $BC: 4x + 5y - 8 = 0$, $CA: 4x - y - 8 = 0$

Câu 9. *Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cùng với hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích S, với:

- a) $M(-4; 10)$, $S = 2$
- b) $M(2; 1)$, $S = 4$
- c) $M(-3; -2)$, $S = 3$
- d) $M(2; -1)$, $S = 4$

Câu 10. *Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua đường thẳng Δ , với:

- a) $d: 2x - y + 1 = 0$, $\Delta: 3x - 4y + 2 = 0$
- b) $d: x - 2y + 4 = 0$, $\Delta: 2x + y - 2 = 0$
- c) $d: x + y - 1 = 0$, $\Delta: x - 3y + 3 = 0$
- d) $d: 2x - 3y + 1 = 0$, $\Delta: 2x - 3y - 1 = 0$

Câu 11. *Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua điểm I, với:

a) $d: 2x - y + 1 = 0, I(2; 1)$

b) $d: x - 2y + 4 = 0, I(-3; 0)$

c) $d: x + y - 1 = 0, I(0; 3)$

d) $d: 2x - 3y + 1 = 0, I \equiv O(0; 0)$

Câu 12. *Cho tam giác ABC, biết phương trình một cạnh và hai đường cao. Viết phương trình hai cạnh và đường cao còn lại, với:

a) $AB: 4x + y - 12 = 0, BB': 5x - 4y - 15 = 0, CC': 2x + 2y - 9 = 0$

b) $BC: 5x - 3y + 2 = 0, BB': 4x - 3y + 1 = 0, CC': 7x + 2y - 22 = 0$

c) $BC: x - y + 2 = 0, BB': 2x - 7y - 6 = 0, CC': 7x - 2y - 1 = 0$

d) $BC: 5x - 3y + 2 = 0, BB': 2x - y - 1 = 0, CC': x + 3y - 1 = 0$

Câu 13. *Cho tam giác ABC, biết tọa độ một đỉnh và phương trình hai đường cao. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với:

a) $A(3; 0), BB': 2x + 2y - 9 = 0, CC': 3x - 12y - 1 = 0$

b) $A(1; 0), BB': x - 2y + 1 = 0, CC': 3x + y - 1 = 0$

Câu 14. *Cho tam giác ABC, biết tọa độ một đỉnh và phương trình hai đường trung tuyến. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với:

a) $A(1; 3), BM: x - 2y + 1 = 0, CN: y - 1 = 0$

b) $A(3; 9), BM: 3x - 4y + 9 = 0, CN: y - 6 = 0$

❖ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d biết:

a) d đi qua $A(2; -1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (5; -4)$.

b) d đi qua $B(4; 7)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (-7; 5)$.

c) d đi qua $C(-2; 10)$ và song song với đường thẳng $d': 4x - 3y + 8 = 0$.

d) d đi qua điểm $D(-4; 1)$ và vuông góc với đường thẳng d:
$$\begin{cases} x = 1 + \frac{3}{2}t \\ y = 4 - 5t \end{cases}$$

e) d đi qua điểm $P(-2; 5)$ và song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 + t \end{cases}$

f) d đi qua điểm $M(0; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x = 5y - 3$

Câu 2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết:

a) Δ đi qua điểm O và song song với đường thẳng $d': \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -4 + 5t \end{cases}$.

b) Δ đi qua $N(3; -4)$ và vuông góc với đường thẳng d: $4x - 7y + 3 = 0$.

c) Δ đi qua $P(2; -5)$ và có hệ số góc $k = 11$.

d) Δ đi qua hai điểm $E(-3; 3)$ và $F(6; -1)$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có $A(-5; 1)$, $B(2; 15)$ và $C(-1; -5)$.

a) Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác.

b) Lập phương trình đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác.

c) Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến AM.

- d) Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung trực của cạnh BC.
 e) Lập phương trình đường thẳng chứa đường phân giác trong góc A của ΔABC .

Câu 4. Cho tam giác ABC biết A(1; 0), B(2; -1) và C(-6; -2).

- a) Lập phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.
 b) Lập phương trình đường cao BH và trung tuyến BM.

Câu 5. Cho tam giác ABC có A(-4; 7), B(-3; -1), C(-1; 1).

- a) Viết phương trình các đường cao của tam giác đó.
 b) Viết phương trình các đường trung tuyến của tam giác đó.
 c) Viết phương trình đường trung trực cạnh BC.
 d) Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tính bán kính đường tròn

B. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

1. Khoảng cách.

Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$, kí hiệu là $d(M; \Delta)$

$$d(M; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0; \Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, kí hiệu $(\Delta_1; \Delta_2)$

$$\cos(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

3. $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

Câu 1. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d, với:

a) $M(4; -5), d: 3x - 4y + 8 = 0$

b) $M(3; 5), d: x + y + 1 = 0$

c) $M(4; -5), d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$

d)

$M(3; 5), d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3}$

Câu 2.

- a) Cho đường thẳng $\Delta: 2x - y + 3 = 0$. Tính bán kính đường tròn tâm $I(-5; 3)$ và tiếp xúc với Δ .
 b) Cho hình chữ nhật ABCD có phương trình 2 cạnh là: $2x - 3y + 5 = 0, 3x + 2y - 7 = 0$ và đỉnh $A(2; -3)$. Tính diện tích hình chữ nhật đó.
 c) Tính diện tích hình vuông có 4 đỉnh nằm trên 2 đường thẳng song song: $d_1: 3x - 4y + 6 = 0$ và $d_2: 6x - 8y - 13 = 0$.

Câu 3. Tính góc giữa hai đường thẳng:

a) $x - 2y - 1 = 0, x + 3y - 11 = 0$

b) $2x - y + 5 = 0, 3x + y - 6 = 0$

c) $3x - 7y + 26 = 0, 2x + 5y - 13 = 0$

d) $3x + 4y - 5 = 0, 4x - 3y + 11 = 0$

Câu 4. Tính số đo của các góc trong tam giác ABC, với:

a) A(-3; -5), B(4; -6), C(3; 1)

b) A(1; 2), B(5; 2), C(1; -3)

c) $AB: 2x - 3y + 21 = 0, BC: 2x + 3y + 9 = 0, CA: 3x - 2y - 6 = 0$

d) $AB: 4x + 3y + 12 = 0, BC: 3x - 4y - 24 = 0, CA: 3x + 4y - 6 = 0$

- Câu 5.** Cho hai đường thẳng d và Δ . Tìm m để góc giữa hai đường thẳng đó bằng α , với:
- a) $d: 2mx + (m-3)y + 4m-1 = 0$, $\Delta: (m-1)x + (m+2)y + m-2 = 0$, $\alpha = 45^\circ$.
- b) $d: (m+3)x - (m-1)y + m-3 = 0$, $\Delta: (m-2)x + (m+1)y - m-1 = 0$, $\alpha = 90^\circ$.
- Câu 6.** Tìm tọa độ điểm M biết :
- a) M nằm trên trục Ox và cách đường thẳng $(\Delta): 4x + 3y + 1 = 0$ một khoảng bằng 5.
- b) M nằm trên trục Oy và cách đường thẳng $(\Delta): 4x + y + 1 = 0$ một khoảng bằng $\sqrt{17}$.
- c) M thuộc $(\Delta): \begin{cases} x=1 \\ y=3+t \end{cases}$ và $d(M, \Delta') = \sqrt{2}$ với $(\Delta'): x + y + 1 = 0$
- Câu 7.** Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và tạo với đường thẳng Δ một góc α , với:
- a) $A(6; 2)$, $\Delta: 3x + 2y - 6 = 0$, $\alpha = 45^\circ$
- b) $A(-2; 0)$, $\Delta: x + 3y - 3 = 0$, $\alpha = 45^\circ$
- c) $A(2; 5)$, $\Delta: x + 3y + 6 = 0$, $\alpha = 60^\circ$
- d) $A(1; 3)$, $\Delta: x - y = 0$, $\alpha = 30^\circ$
- Câu 8.** Cho tam giác ABC. Tính diện tích tam giác ABC, với:
- a) $A(-1; -1)$, $B(2; -4)$, $C(4; 3)$
- b) $A(-2; 14)$, $B(4; -2)$, $C(5; -4)$
- Câu 9.** Viết phương trình đường thẳng d song song và cách đường thẳng Δ một khoảng k , với:
- a) $\Delta: 2x - y + 3 = 0$, $k = \sqrt{5}$
- b) $\Delta: \begin{cases} x=3t \\ y=2+4t \end{cases}$, $k=3$
- c) $\Delta: y - 3 = 0$, $k=5$
- d) $\Delta: x - 2 = 0$, $k=4$
- Câu 10.** Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng Δ và cách điểm A một khoảng bằng k , với:
- a) $\Delta: 3x - 4y + 12 = 0$, $A(2; 3)$, $k=2$
- b) $\Delta: x + 4y - 2 = 0$, $A(-2; 3)$, $k=3$
- c) $\Delta: y - 3 = 0$, $A(3; -5)$, $k=5$
- d) $\Delta: x - 2 = 0$, $A(3; 1)$, $k=4$
- Câu 11.** Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách B một khoảng bằng d , với:
- a) $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $d=3$
- b) $A(-1; 3)$, $B(4; 2)$, $d=5$
- c) $A(5; 1)$, $B(2; -3)$, $d=5$
- d) $A(3; 0)$, $B(0; 4)$, $d=4$.
- Câu 12.** Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cách đều hai điểm P, Q, với:
- a) $M(2; 5)$, $P(-1; 2)$, $Q(5; 4)$
- b) $M(1; 2)$, $P(2; 3)$, $Q(4; -5)$
- c) $M(10; 2)$, $P(3; 0)$, $Q(-5; 4)$
- d) $M(2; 3)$, $P(3; -1)$, $Q(3; 5)$
- Câu 13.** Viết phương trình đường thẳng d cách điểm A một khoảng bằng h và cách điểm B một khoảng bằng k , với:
- a) $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $h=2$, $k=4$
- b) $A(2; 5)$, $B(-1; 2)$, $h=1$, $k=3$
- Câu 14.** *Cho đường thẳng $\Delta: x - y + 2 = 0$ và các điểm $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(-2; 2)$.
- a) Chứng minh đường thẳng Δ cắt đoạn thẳng AB.
- b) Chứng minh rằng hai điểm O, A nằm cùng về một phía đối với đường thẳng Δ .
- c) Tìm điểm O' đối xứng với O qua Δ .
- d) Trên Δ , tìm điểm M sao cho độ dài đường gấp khúc OMA ngắn nhất.
- Câu 15.** Viết phương trình đường thẳng qua $M(-1; 2)$ và tạo với đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+3t \\ y=-2t \end{cases}$ một góc 60° .
- Câu 16.** *Cho hai điểm $A(2; 2)$, $B(5; 1)$. Tìm điểm C trên đường thẳng $\Delta: x - 2y + 8 = 0$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 17.
- Câu 17.** *Tìm tập hợp điểm.
- a) Tìm tập hợp các điểm cách đường thẳng $\Delta: -2x + 5y - 1 = 0$ một khoảng bằng 3.
- b) Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $d: 5x + 3y - 3 = 0$, $\Delta: 5x + 3y + 7 = 0$.
- c) Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $d: 4x - 3y + 2 = 0$, $\Delta: y - 3 = 0$.

- d) Tìm tập hợp các điểm có tỉ số các khoảng cách đến hai đường thẳng sau bằng $\frac{5}{13}$:
 $d: 5x - 12y + 4 = 0$ và $\Delta: 4x - 3y - 10 = 0$.

Câu 18. *Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng:

- a) $3x - 4y + 12 = 0$, $12x + 5y - 20 = 0$ b) $3x - 4y - 9 = 0$, $8x - 6y + 1 = 0$
c) $x + 3y - 6 = 0$, $3x + y + 2 = 0$ d) $x + 2y - 11 = 0$, $3x - 6y - 5 = 0$

Câu 19. *Cho hình vuông ABCD có tâm $I(4; -1)$ và phương trình một cạnh là $3x - y + 5 = 0$.

- a) Viết phương trình hai đường chéo của hình vuông. b) Tìm tọa độ 4 đỉnh của hình vuông.

❖ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d , với:

- a) $M(3; -5)$, $d: -3x + 4y + 6 = 0$ b) $M(3; 0)$, $d: 6x + 8y + 7 = 0$
c) $M(4; -5)$, $d: \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ d) $M(3; 2)$, $d: \frac{x-2}{12} = \frac{y+1}{5}$

Câu 2. a) Cho đường thẳng $\Delta: 2x + y + 3 = 0$. Tính bán kính đường tròn tâm $I(-5; -2)$ và tiếp xúc với Δ .

b) Cho hình chữ nhật ABCD có phương trình 2 cạnh là: $5x - 3y + 1 = 0$, $3x + 5y - 7 = 0$ và đỉnh $A(2; -3)$. Tính diện tích hình chữ nhật đó.

c) Tính diện tích hình vuông có 4 đỉnh nằm trên 2 đường thẳng song song: $d_1: 3x - 4y + 8 = 0$ và $d_2: 6x - 8y - 15 = 0$.

Câu 3. Tính góc giữa hai đường thẳng:

- a) $x - 2y - 5 = 0$, $x + 3y + 6 = 0$ b) $2x + y + 3 = 0$, $3x - y - 6 = 0$
c) $3x - 7y + 5 = 0$, $2x - 5y - 12 = 0$ d)
 $-3x - 4y - 7 = 0$, $4x - 3y + 15 = 0$

Câu 4. Tính số đo của các góc trong tam giác ABC, với:

- a) $A(-2; 7)$, $B(3; 4)$, $C(1; 12)$
b) $A(1; 3)$, $B(5; 6)$, $C(1; -3)$
c) $AB: 2x - 3y + 25 = 0$, $BC: 2x + 3y + 4 = 0$, $CA: 3x - 2y - 8 = 0$
d) $AB: 4x + 3y + 7 = 0$, $BC: 3x - 4y - 5 = 0$, $CA: 3x + 4y - 1 = 0$

Câu 5. Tìm tọa độ điểm M biết:

- a) M nằm trên trục Ox và cách đường thẳng $(\Delta): 4x - 3y + 5 = 0$ một khoảng bằng 5.
b) M nằm trên trục Oy và cách đường thẳng $(\Delta): x + 4y + 1 = 0$ một khoảng bằng $2\sqrt{17}$.
c) M thuộc $(\Delta): \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - t \end{cases}$ và $d(M, \Delta') = 2\sqrt{2}$ với $(\Delta'): x + y + 2 = 0$

Câu 6. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và tạo với đường thẳng Δ một góc α , với:

- a) $A(5; -2)$, $\Delta: 3x + 2y - 5 = 0$, $\alpha = 45^\circ$ b) $A(-2; -3)$, $\Delta: 3x + y - 5 = 0$, $\alpha = 45^\circ$
c) $A(2; -1)$, $\Delta: x + 3y + 5 = 0$, $\alpha = 60^\circ$ d) $A(-1; 3)$, $\Delta: x - y = 0$, $\alpha = 30^\circ$

Câu 7. Viết phương trình đường thẳng d song song và cách đường thẳng Δ một khoảng k , với:

- a) $\Delta: 2x - 3y + 3 = 0$, $k = \sqrt{13}$ b) $\Delta: \begin{cases} x = -3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$, $k = 2$
c) $\Delta: x - 5 = 0$, $k = 3$ d) $\Delta: y - 2 = 0$, $k = 7$

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R có dạng:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Dạng khai triển: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $c = a^2 + b^2 - R^2$

2. Phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với điều kiện: $a^2 + b^2 - c > 0$, là phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$
3. Cho đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$, bán kính R và đường thẳng $\Delta: mx + ny + c = 0$. Δ tiếp xúc với (C) $d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|ma + nb + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}} = R$

Câu 1. Viết phương trình đường tròn có tâm I và đi qua điểm A, với:

a) $I(2; 4), A(-1; 3)$

b) $I(-3; 2), A(1; -1)$

c) $I(-1; 0), A(3; -11)$

d) $I(1; 2), A(5; 2)$

Câu 2. Viết phương trình đường tròn có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ , với:

a) $I(3; 4), \Delta: 4x - 3y + 15 = 0$

b) $I(2; 3), \Delta: 5x - 12y - 7 = 0$

c) $I(-3; 2), \Delta \equiv Ox$

d) $I(-3; -5), \Delta \equiv Oy$

Câu 3. Viết phương trình đường tròn có đường kính AB, với:

a) $A(-2; 3), B(6; 5)$

b) $A(0; 1), C(5; 1)$

c) $A(-3; 4), B(7; 2)$

d) $A(5; 2), B(3; 6)$

Câu 4. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ , với:

a) $A(2; 3), B(-1; 1), \Delta: x - 3y - 11 = 0$

b) $A(0; 4), B(2; 6), \Delta: x - 2y + 5 = 0$

c) $A(2; 2), B(8; 6), \Delta: 5x - 3y + 6 = 0$

Câu 5. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, với:

a) $A(2; 0), B(0; -3), C(5; -3)$

b) $A(5; 3), B(6; 2), C(3; -1)$

c) $A(1; 2), B(3; 1), C(-3; -1)$

d) $A(-1; -7), B(-4; -3), C \equiv O(0; 0)$

e) $AB: x - y + 2 = 0, BC: 2x + 3y - 1 = 0, CA: 4x + y - 17 = 0$

f) $AB: x + 2y - 5 = 0, BC: 2x + y - 7 = 0, CA: x - y + 1 = 0$

Câu 6. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ , với:

a) $A(1; 2), B(3; 4), \Delta: 3x + y - 3 = 0$

b)

$A(6; 3), B(3; 2), \Delta: x + 2y - 2 = 0$

c) $A(-1; -2), B(2; 1), \Delta: 2x - y + 2 = 0$

d) $A(2; 0), B(4; 2), \Delta \equiv Oy$

Câu 7. Cho $A(1; 3); B(4; 7); C(0; 2)$

a) Viết phương trình đường tròn đường kính AB.

b) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

c) Viết phương trình đường tròn tâm O và tiếp xúc với đường thẳng AC

Câu 8. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

Câu 9. Tìm m để các phương trình sau là phương trình đường tròn:

a) $x^2 + y^2 + 4mx - 2my + 2m + 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 2my + 3m^2 - 2 = 0$

$$c) x^2 + y^2 - 2(m-3)x + 4my - m^2 + 5m + 4 = 0$$

$$d) x^2 + y^2 - 2mx - 2(m^2 - 1)y + m^4 - 2m^4 - 2m^2 - 4m + 1 = 0$$

Câu 10. * Tìm m để các phương trình sau là phương trình đường tròn:

$$a) x^2 + y^2 - 2x \cos m + 4y + \cos^2 m - 2 \sin m + 5 = 0$$

$$b) x^2 + y^2 - 4x \cos m + 2y \sin m - 4 = 0$$

Câu 11. *Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B, với:

$$a) A(-2; 6), \Delta: 3x - 4y - 15 = 0, B(1; -3) \quad b) A(-2; 1), \Delta: 3x - 2y - 6 = 0, B(4; 3)$$

$$c) A(6; -2), \Delta \equiv Ox, B(6; 0) \quad d)$$

$$A(4; -3), \Delta: x + 2y - 3 = 0, B(3; 0)$$

Câu 12. *Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 , với:

$$a) A(2; 3), \Delta_1: 3x - 4y + 1 = 0, \Delta_2: 4x + 3y - 7 = 0$$

$$b) A(1; 3), \Delta_1: x + 2y + 2 = 0, \Delta_2: 2x - y + 9 = 0$$

$$c) A \equiv O(0; 0), \Delta_1: x + y - 4 = 0, \Delta_2: x + y + 4 = 0$$

$$d) A(3; -6), \Delta_1 \equiv Ox, \Delta_2 \equiv Oy$$

Câu 13. *Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d , với:

$$a) \Delta_1: 3x + 2y + 3 = 0, \Delta_2: 2x - 3y + 15 = 0, d: x - y = 0$$

$$b) \Delta_1: x + y + 4 = 0, \Delta_2: 7x - y + 4 = 0, d: 4x + 3y - 2 = 0$$

$$c) \Delta_1: 4x - 3y - 16 = 0, \Delta_2: 3x + 4y + 3 = 0, d: 2x - y + 3 = 0$$

$$d) \Delta_1: 4x + y - 2 = 0, \Delta_2: x + 4y + 17 = 0, d: x - y + 5 = 0$$

Câu 14. *Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC, với:

$$a) A(2; 6), B(-3; -4), C(5; 0)$$

$$b) A(2; 0), B(0; -3), C(5; -3)$$

$$c) AB: 2x - 3y + 21 = 0, BC: 3x - 2y - 6 = 0, CA: 2x + 3y + 9 = 0$$

$$d) AB: 7x - y + 11 = 0, BC: x + y - 15 = 0, CA: 7x + 17y + 65 = 0$$

❖ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Viết phương trình đường tròn có tâm I và đi qua điểm A, với:

$$b) I(-2; 4), A(-1; 5)$$

$$b) I(-3; -2), A(5; -1)$$

$$c) I(-1; 0), A(3; -7)$$

$$d) I(-1; 2), A(0; 2)$$

Câu 2. Viết phương trình đường tròn có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ , với:

$$a) I(2; 4), \Delta: 4x - 3y + 12 = 0$$

$$b) I(2; -3), \Delta: 5x + 12y - 7 = 0$$

$$c) I(-5; 2), \Delta \equiv Ox$$

$$d) I(-3; 5), \Delta \equiv Oy$$

Câu 3. Viết phương trình đường tròn có đường kính AB, với:

$$b) A(-2; 15), B(0; 5)$$

$$b) A(0; -1), C(5; -1)$$

$$c) A(-3; 6), B(10; 2)$$

$$d) A(5; 13), B(3; 1)$$

Câu 4. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ , với:

$$a) A(2; -1), B(-1; -1), \Delta: x - 3y - 12 = 0$$

$$b) A(0; 3), B(-2; -6), \Delta: x - 3y + 5 = 0$$

$$c) A(2; 0), B(2; 6), \Delta: 5x - 3y + 7 = 0$$

Câu 5. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, với:

$$a) A(2; -1), B(0; 3), C(4; -3)$$

$$b) A(7; 3), B(6; 2), C(5; -1)$$

$$c) A(-1; 2), B(3; 5), C(-3; -1)$$

$$d) A(-1; -5), B(-4; 2), C \equiv O(0; 0)$$

- Câu 6.** Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ , với:
- a) $A(1; -2), B(3; 4), \Delta: 5x + y - 1 = 0$ b) $A(4; 3), B(3; -2), \Delta: x + 2y + 1 = 0$
 c) $A(-1; 2), B(3; 1), \Delta: 2x - y + 4 = 0$ d) $A(2; 0), B(5; 2), \Delta \equiv Oy$
- Câu 7.** Cho $A(1; 7); B(4; 2); C(0; -2)$
- a) Viết phương trình đường tròn đường kính AB.
 b) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
 c) Viết phương trình đường tròn tâm O và tiếp xúc với đường thẳng AC
- Câu 8.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó:
- a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 2 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 12 = 0$
 c) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 8x + 5 = 0$

B. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

- Câu 1.** Cho đường tròn (C) và đường thẳng d .
- (C): $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$, $d: 2x - y + 3 = 0$
- a) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với các trục tọa độ.
 b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d .
 c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d .
- Câu 2.** Cho đường tròn (C), điểm A và đường thẳng d .
- (C): $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, $A(-7; 7)$, $d: 3x + 4y - 6 = 0$
- a) Chứng tỏ điểm A ở ngoài (C).
 b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.
 c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d .
 d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d .
- Câu 3.** Cho đường tròn (C) và đường thẳng d : (C): $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$, $d: 2x - 3y + 1 = 0$
- a) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với các trục tọa độ.
 b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d .
 c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d
- Câu 4.** Cho đường tròn (C), điểm A và đường thẳng d :
- (C): $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$, $A(2; 2)$, $d: x + 2y - 6 = 0$
- a) Chứng tỏ điểm A ở ngoài (C).
 b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.
 c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d .
 d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d
- Câu 5.** *Cho hai điểm A(1; 2), B(3; 4) và đường thẳng $d: y = -3 - 3x$.
- a) Viết phương trình các đường tròn (C_1) và (C_2) qua A, B và tiếp xúc với d .
 b) Viết phương trình tiếp tuyến chung (khác d) của hai đường tròn đó.
- Câu 6.** *Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x - 2my + m^2 + 4 = 0$.
- a) Tìm m để từ A(2; 3) có thể kẻ được hai tiếp tuyến với (C).
 b) Viết phương trình các tiếp tuyến đó khi $m = 6$.

❖ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Câu 1.** Cho đường tròn (C) và đường thẳng d .
- (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$, $d: 2x - 6y + 3 = 0$
- a) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với các trục tọa độ.

- b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d .
 c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d .
- Câu 2.** Cho đường tròn (C), điểm A và đường thẳng d .
 $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 12 = 0, A(-5; 7), d: 3x + 4y - 2 = 0$
 a) Chứng tỏ điểm A ở ngoài (C).
 b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.
 c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d .
 d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d .
- Câu 3.** Cho đường tròn (C) và đường thẳng $d: (C): x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0, d: 10x - 3y + 5 = 0$
 a) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với các trục tọa độ.
 b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d .
 c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d .
- Câu 4.** Cho đường tròn (C), điểm A và đường thẳng d :
 $(C): x^2 + y^2 + 4x - 6y + 10 = 0, A(1; 2), d: x + 3y - 6 = 0$
 a) Chứng tỏ điểm A ở ngoài (C).
 b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.
 c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d .
 d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d .

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

- Câu 1.** Cho elip (E). Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, tâm sai, phương trình các đường chuẩn của (E), với (E) có phương trình:
- a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$
 e) $16x^2 + 25y^2 = 400$ f) $x^2 + 4y^2 = 1$ g) $4x^2 + 9y^2 = 5$ h) $9x^2 + 25y^2 = 1$
- Câu 2.** Viết phương trình chính tắc của (E):
 a) Độ dài trục lớn bằng 8, độ dài tiêu cự bằng 4.
 b) Tiêu cự bằng 4 và tâm sai $e = \frac{3}{5}$.
 c) Một tiêu điểm là $F(-\sqrt{3}; 0)$ và điểm $N(1; \frac{\sqrt{3}}{2})$ thuộc (E).
 d) (E) có độ dài trục lớn bằng 16, tâm sai $e = \frac{1}{4}$.
 e) (E) có độ dài trục bé bằng 8, tiêu cự bằng 10.
- Câu 3.** Cho (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Tìm điểm M trên (E) sao cho:
 a) $MF_1 = 2MF_2$.
 b) M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.
 c) M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60° .
 d) M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 120° .
- Câu 4.** Cho điểm M(1;1) và (E): $4x^2 + 9y^2 = 36$.
 a) Tìm tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm và tâm sai của (E).
 b) Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua M luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.
 c) Lập pt đường thẳng d qua M cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho MA = MB.
- Câu 5.** Cho (E): $16x^2 + 25y^2 = 100$.

- a) Tìm điểm trên (E) có hoành độ bằng 2 và tính khoảng cách từ điểm đó đến hai tiêu điểm .
b) Tìm b để đường thẳng $y = x + b$ có điểm chung với (E) .
-

ÔN TẬP CHƯƠNG III

Câu 1. Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d biết:

- a) d đi qua A(2; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (7; -2)$.
b) d đi qua B(4; -3) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (7; 3)$.
c) d đi qua C(-2; 5) và song song với đường thẳng d': $4x - 5y + 10 = 0$.
d) d đi qua điểm D(-5; 3) và vuông góc với đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + 9t \end{cases}$.

Câu 2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết:

- a) Δ đi qua điểm M(2; 5) và song song với đường thẳng d': $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 + 5t \end{cases}$.
b) Δ đi qua N(3; 4) và vuông góc với đường thẳng d: $4x - 7y + 3 = 0$.
c) Δ đi qua P(2; -5) và có hệ số góc $k = 11$.
d) Δ đi qua hai điểm E(-3; 3) và F(6; -1).

Câu 3. Cho tam giác ABC có A(-2; 1), B(2; 3) và C(1; -5).

- a) Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác.
b) Lập phương trình đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác.
c) Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến AM.
d) Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung trực của cạnh BC.
e) Lập phương trình đường thẳng chứa đường phân giác trong góc A của ΔABC .

Câu 4. Cho tam giác ABC biết A(1; 4), B(3; -1) và C(6; -2).

- a) Lập phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.
b) Lập phương trình đường cao AH và trung tuyến AM.

Câu 5. Cho tam giác ABC có A(-4; 5), B(6; -1), C(-1; 1).

- a) Viết phương trình các đường cao của tam giác đó.
b) Viết phương trình các đường trung tuyến của tam giác đó.
c) viết phương trình đường trung trực cạnh BC.

Câu 6. Biết hai cạnh của một hình bình hành có phương trình $x + 3y = 0$ và $2x - 5y + 6 = 0$, một đỉnh của hình bình hành là C(4; 1). Viết phương trình các cạnh còn lại của hình bình hành.

Câu 7. Cho tam giác ABC có B(-4; -3), hai đường cao có phương trình là $5x + 3y + 4 = 0$ và $3x + 8y + 13 = 0$. Lập phương trình các cạnh của tam giác.

Câu 8. Cho tam giác ABC có B(2; -7), phương trình đường cao qua A là $3x + y + 11 = 0$, phương trình trung tuyến về từ C là $x + 2y + 7 = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC với M(-2; 2) là trung điểm của BC, cạnh AB có phương trình $x - 2y - 2 = 0$, cạnh AC có phương trình $2x + 5y + 3 = 0$. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

- Câu 10.** Phương trình hai cạnh của một tam giác trong mặt phẳng tọa độ là $5x - 2y + 6 = 0$ và $4x + 7y - 21 = 0$. Viết phương trình cạnh thứ ba của tam giác biết trục tâm tam giác trùng với gốc tọa độ.
- Câu 11.** Trong mặt phẳng tọa độ cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-2; -1)$ và các cạnh AB: $4x + y + 15 = 0$ và AC: $2x + 5y + 3 = 0$.
- a) Tìm tọa độ đỉnh A và tọa độ trung điểm M của BC.
- b) Tìm tọa độ đỉnh B và viết phương trình đường thẳng BC.
- Câu 12.** Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC biết $A(1; 3)$ và hai đường trung tuyến có phương trình $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$.
- Câu 13.** Cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; 2)$ và hai đường cao lần lượt có phương trình $9x - 3y - 4 = 0$; $x + y - 2 = 0$. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.
- Câu 14.** Cho tam giác ABC có $A(2; -1)$ và các đường phân giác trong góc B và C lần lượt có phương trình: $x - 2y + 1 = 0$; $x + y + 3 = 0$. Lập phương trình đường thẳng BC.
- Câu 15.** Xác định tọa độ đỉnh B của tam giác ABC biết $C(4; 3)$ và đường phân giác trong, trung tuyến kẻ từ A lần lượt có phương trình $x + 2y - 5 = 0$ và $4x + 13y - 10 = 0$.
- Câu 16.** Cho tam giác ABC có $A(-1; 3)$, đường cao BH nằm trên đường thẳng $y = x$, phân giác trong góc C nằm trên đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC.
- Câu 17.** Cho tam giác ABC có $A(-2; 1)$ và các đường cao có phương trình $2x - y + 1 = 0$; $3x + y + 2 = 0$. Viết phương trình đường trung tuyến qua đỉnh A của tam giác.
- Câu 18.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy
- a) Cho điểm $I(2; 3)$ và đường thẳng $\Delta: x - 3y + 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn tâm I tiếp xúc với Δ .
- b) Cho đường thẳng $d: x - 7y + 10 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $d': 2x + y = 0$ và tiếp xúc với d tại $A(4; 2)$.
- Câu 19.** Trong mặt phẳng tọa độ cho ba đường tròn (C_1) , (C_2) , (C_3) lần lượt có phương trình là:
- $(C_1): x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$; $(C_2): x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$;
 $(C_3): x^2 + y^2 - 2x - 12y + 12 = 0$.
- a) Tìm tọa độ tâm và bán kính của mỗi đường tròn đó.
- b) Viết phương trình đường tròn đi qua tâm của ba đường tròn trên.
- Câu 20.** Viết phương trình đường tròn đi qua điểm $A(2; -1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ.
- Câu 21.** Cho $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$. Tìm điểm M trên (E) sao cho :
- a) M có tọa độ là các số nguyên . b) M có tổng hai tọa độ đạt GTLN , GTNN .
- Câu 22.** Cho $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $d: 2x + 15y - 10 = 0$.
- a) CMR: d luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài AB .
- b) Tìm tọa độ điểm C trên (E) sao cho tam giác ABC cân tại A biết A có hoành độ dương .